Une qualité d'une grille de mots croisés se mesure à son nombre de cases noires. Les grilles parfaites—sans cases noires—sont les plus difficiles à concevoir, tant pour un humain que pour une machine. En effet, la stratégie brutale: énumérer tous $n$-uples de mots horizontaux et ne retenir que ceux formant des mots verticaux valides est sans espoir, car il y a plus de 50 000 mots de 10 lettres dans l'Officiel du Scrabble [Ods94], le dictionnaire des scrabbleurs que nous avons utilisé, donc environ $10^{47}$ grilles $10 \times 10$ à tester.

En revanche, la recherche de grilles symétriques (selon la diagonale NW-SE) est beaucoup plus aisée. On place successivement tous les mots de $n$ lettres dans la première ligne et la première colonne, puis on n'essaie à la deuxième ligne (et donc à la deuxième colonne) que les mots commençant par la lettre à la première colonne ; puis, pour la troisième ligne, que les mots dont les deux premières lettres se trouvent dans les deux premières colonnes, etc. Si l'on ajoute la condition que tous les débuts de mots apparaissant en cours de recherche soient des préfixes d'un mot valide, on obtient les deux grilles $9 \times 9$ ci-dessous en moins de 5 heures sur un simple PC. Il y a plus de 40 000 grilles symétriques $8 \times 8$ et aucune grille symétrique $10 \times 10$.

Quelques optimisations ont permis de rechercher exhaustivement les grilles $10 \times 10$, même non-symétriques. On commence par considérer toutes les grilles partielles ayant un mot de 10 lettres à la première ligne ; on considère ensuite toutes les grilles partielles obtenues des précédentes en mettant un mot de 10 lettres à la deuxième ligne et dont tous les mots verticaux de 2 lettres sont des préfixes de mots de 10 lettres ; puis les grilles partielles obtenues en ajoutant un mot à la troisième ligne, etc. On ne trouve même aucune grille partielle de taille $8 \times 10$ dont les mots verticaux soient des préfixes de mots de 10 lettres. De même, on montre qu'il n'existe aucune grille $9 \times 10$, ni en français ni en anglais. Il a fallu environ 1 mois à une machine rapide (processeur Alpha à 433 MHz) pour obtenir ce (non-)résultat.

Ces deux grilles ont été publiées dans la Gazette des Mathématiciens [BB96]. Pour la deuxième grille nous ne donnons que les définitions ; aux lecteurs de reconstituer la solution !

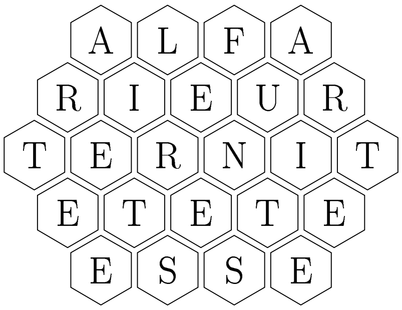
| I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | A | C | T | I | S | E | N | T |
| A | C | H | E | M | I | N | E | R |
| C | H | A | R | M | E | R | A | I |
| T | E | R | R | I | G | E | N | E[1] |
| I | M | M | I | N | E | N | T | S |
| S | I | E | G | E | R | A | I | T |
| E | N | R | E | N | A | S | S | E |
| N | E | A | N | T | I | S | E | R |
| T | R | I | E | S | T | E | R | S |

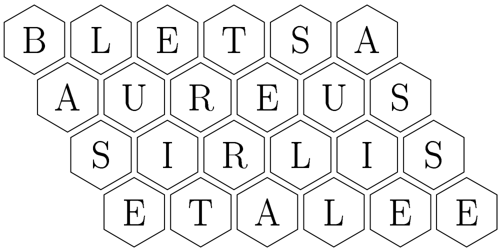
| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |

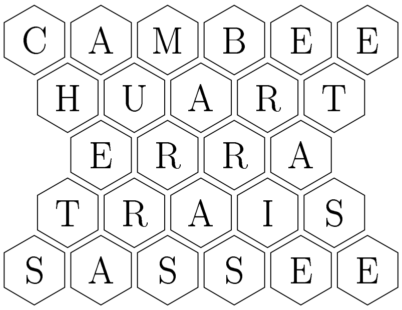
**1=I** L'ordinateur et l'ordonnateur le font dans les bons jours.
**2=II** Ne pas dérouter.
**3=III** Plairai à un serpent.
**4=IV** Dépôt marin d'origine volcanique.
**5=V** Les dangers le sont souvent.
**6=VI** Au conditionnel postérieur.
**7=VII** Nécessite un homme cultivé, un cheval et un temps.
**8=VIII** Interdit par Lavoisier et Héraclite.
**9=IX** De l'acide et de l'alcool sans eau, mais à trois.

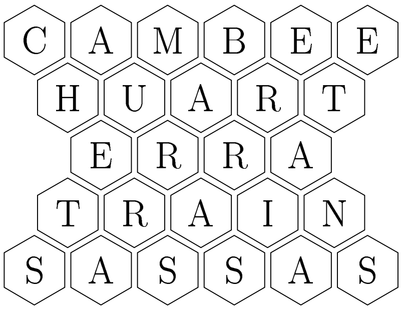
1. *adj.* (Dépôt marin) d'origine continentale.

Une variante, à notre connaissance inexplorée, de la cruciverbie est la grille de forme hexagonale : avec des mots horizontaux, diagonaux montants et descendants. S'il est difficile pour un humain de trouver des exemples de grande taille, un ordinateur se prête bien à la tache, car les contraintes dans les 3 directions permettent de rapidement éliminer les grilles non complétables. Tous les exemples ci-dessous ont été trouvés en moins d'une demi-heure par la machine Alpha mentionnée ci-dessus.




Dans cette dernière grille, une lettre peut être changée pour produire une autre grille ; le lecteur la trouvera-t-il ? Quelques mots dans ces grilles sont rares :

**Auréus:** monnaie d'or romaine.
**Bletser:** *(helvétisme)* rapiécer.
**Camber:** *(helvétisme)* enjamber.
**Ferté:** forteresse, place forte.
**Huart:** *(québecisme)* plongeon arctique.
**Sirli:** alouette d'Afrique du nord.
**Tell:** tumulus formé par des ruines.

## Références

[BB96] Laurent Bartholdi and Nicolas Bartholdi, *Mots croisés mélanophobes*, Gaz. Math. (1996), no. 70, 45–47.

[Ods94] *L'Officiel du Scrabble, deuxième édition*, 1994.